PLUS FORT !

Dans tout ce problème, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Un joueur dispose de n cartes numérotées de 1 à n. Il les mélange puis note dans l'ordre la suite des numéros des cartes obtenue. On appelle *liste* la suite des numéros ainsi observés.

Le nombre n sera appelé *longueur* de la liste.

Par exemple, avec $n = 8$, une liste possible est $L = [2,5,7,6,1,8,4,3]$.

Avec une liste donnée, le joueur marque un point chaque fois que le numéro d'une carte est supérieur à celui de la carte précédente.

Par exemple avec la liste $L = [2, \mathbf{5}, \mathbf{7}, 6,1, \mathbf{8}, 4,3]$, le joueur marque 3 points.

On appelle *score* le nombre de points marqués par le joueur. Le score précédent est donc 3.

1. *Quelques exemples*

a. Donner un autre exemple de liste de longueur 8 et de score 3.

b. Donner toutes les listes de longueur 3 possibles ainsi que les scores correspondants.

2. Écrire sur votre copie la syntaxe d'une fonction Python qui, prenant en argument une liste L et sa longueur n, renvoie le score de la liste L.

On revient au cas général ainsi qu'à des considérations théoriques.

3. Démontrer que tout score est compris entre 0 et $n-1$. Donner une liste dont le score vaut 0 et une liste dont le score vaut $n-1$.

4. Soit k un entier compris entre 1 et $n-2$.

a. Démontrer qu'il existe une liste de longueur n et de score k.

b. Peut-on trouver deux listes de longueur n et de score k ?

On note désormais $L_n(s)$ le nombre de listes de longueur n et de score s.

5. Déterminer $L_n(0)$ et $L_n(n-1)$.

6. ***Une relation de récurrence***

a. Déterminer $L_3(0), L_3(1)$ et $L_3(2)$. Comment insérer dans la liste $[3,1,2]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score vaut encore 1 ?

b. Comment insérer dans la liste $[3,2,1]$ la carte portant le numéro 4 pour obtenir une liste dont le score reste nul ?

c. Vérifier que $L_4(1) = 2L_3(1) + 3L_3(0)$.

d. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 3$,

$$L_{n+1}(1) = 2L_n(1) + nL_n(0).$$

e. Pour tout n et pour tout entier naturel k non nul, exprimer $L_{n+1}(k)$ à l'aide de $L_n(k)$ et $L_n(k-1)$.

f. Dresser un tableau des valeurs de $L_n(k)$ pour $n \in \{3, 4, 5\}$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.